廣義相對論講義

高文芳

凡所有相皆是虛妄
如見諸相非相即見如來

在書前頭　我想說的幾句話

對一般物理系的學生而言，相對論的哲學背景及意涵，當然是非常重要也非常有意思。但是如果我們急著去了解，探索一般天文及宇宙學裡要用到的 Einstein 場方程式 $G_{ab} \equiv R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}R = T_{ab}$ 的由來以及解法，那麼我現在要介紹的，便是一套跳躍法。我試圖架構一套數學家及物理底子不夠的人也可以急速切入的教材，希望能讓更多有意接觸宇宙學及重力理論的朋友，能在最經濟、最快速的引導下，一探天體奧祕。

但是我必須提醒物理系同學，一般廣義相對論的教材，對你物理觀的建立，仍然不可或缺，本書僅供參考。我建議你們先看過本書，再回頭看其他教材，對你的了解， 勢必多有幫助。

本教材是本人交大授課數年的筆記，有鑑於我自編的教材與坊間其他教本，多有不同，爲了使更多人能由此受益，所次花點時間將其打印成書，嘉惠後進。但是我必須先說明一下: 這只是草稿 錯誤自是不少 千萬不要懷疑我的功力

本書受諸多交大及清華學生同仁指正及幫忙編印，尤其是林世昀與許景誌的打字與校正，與戴佳蘋同學的種種協助, 特此致謝.

Chapter 1

Tensor 與物理量 (Physical Quantity)

廣義相對論的一個重大的假設爲: general covariance principle under general coordinate transformation (C.T.)。換句話說，廣義相對論陳述的是在座標轉換下，物理定律將依照一個特定的方式隨著 C.T. 轉換。

事實上，物理常被定義爲：可以重覆驗證的現象。做實驗一定牽涉到做實驗的時間位置的差異。同時任一特定現象的觀察，勢必牽涉到不同人在同時或不同時、同地或不同地的觀測，意即在不同座標下的觀測結果，一旦也勢必需要相互比較，一定要有一個討論的基礎與規則。否則張三說他見到鬼，李四無法經由座標轉換而重覆張三的觀測，一切就失去了討論的基礎也就無法稱之爲物理。因此，我們必須先把物理量定義成一個我們討論物理現象的標準。相對於一般做實驗的人稱可以測量的東西叫物理量，我們對物理量的定義比較寬鬆。

從運作的角度來看，如果我們有一個可以座標化的空間，令 $x^a, a = 0, 1, 2, \ldots, n$ 代表 $n+1$ 維空間中一點 x 的座標。我們要在微積分的基礎下討論物理現象，則 $\partial_a \equiv \frac{\partial}{\partial x^a}$ 與 dx^a 必須是一個很好的物理量（$i.e.$一個可以做討論基礎的量）而我們知道，在一個 general coordinate transformation $x \to x' = x'(x)$ s.t. $\det \frac{\partial x'^a}{\partial x^b} \neq 0$（$i.e.$座標反轉換

存在）底下，

$$dx'^a = \frac{\partial x'^a}{\partial x^b} dx^b, \tag{1.1}$$

$$\partial'_a = \frac{\partial x^b}{\partial x'^a} \partial_b, \tag{1.2}$$

所以我們把任意按 dx^a 轉換的函數 $A^a(x)$ 或是按 ∂_a 轉換的函數 $B_a(x)$ 定義爲物理量，*i.e.* 只要在座標由 $x \to x' = x'(x)$ 轉換下

$$A^a(x) \to A'^a(x') = \frac{\partial x'^a}{\partial x^b} A^b(x), \tag{1.3}$$

$$B_a(x) \to B'_a(x') = \frac{\partial x^b}{\partial x'^a} B_b(x), \tag{1.4}$$

則我們稱 $A^a(x)$ 或 $B_a(x)$ 爲物理量；其實數學家稱他們爲 tensor。$A^a(x)$ 稱爲 type $T(1,0)$ 的 tensor 或叫 contravariant vector，$B_a(x)$ 稱爲 type$T(0,1)$ 的 tensor 或叫 covariant vecotor。除了這兩類 tensor 外我們將按

$$C^{a_1 a_2 \dots a_m}{}_{b_1 \dots b_n}(x) \to C'^{a_1 \dots a_m}{}_{b_1 \dots b_n}(x') = \prod_{i=1}^{m} \frac{\partial x'^{a_i}}{\partial x^{c_i}} \prod_{j=1}^{n} \frac{\partial x^{d_j}}{\partial x'^{b_j}} C^{c_1 \dots c_m}{}_{d_1 \dots d_n}(x) \tag{1.5}$$

轉換的函數 $C^{a_1 \dots a_m}{}_{b_1 \dots b_n}(x)$ 稱爲 type$T(m,n)$ 的 tensor 或物理量，其中最特殊的也最簡單的是按

$$\phi(x) \to \phi'(x') = \phi(x) \tag{1.6}$$

轉換的函數，因爲不帶 index 也不轉換，稱爲 $T(0,0)$ 的 tensor，又叫做 scalar。我們在場論中所探討的基本粒子，皆是由這些 tensor 組成。（當然我們暫時不談 fermionic 部份，只談 bosonic 粒子）比方說 electro-weak interaction 中的 photon A_a，intermediate vector bosons A_a^m （ m 爲 Lie 代數的 index)，還有百尋不獲的 Higgs 粒子 ϕ，強作用的 gluon A_a^n 及重力場的 graviton g_{ab}。另外用以導出運動方程式（Equations of Motion, EOM）的 Action，即爲 scalar。

〔例〕 $\mathbf{R}^3$ 裡的座標轉換 $x^a = (x, y, z) \to x'^a = (r, \theta, \varphi)$。

我們常做的 Cartesian coordinate $x^a \equiv (x, y, z)$ 換成 $x'^a \equiv (r, \theta, \varphi)$ 其實是一種 general coordinate transformation，($\det \frac{\partial x'^a}{\partial x^b} \neq 0$) 。

令$x \to x'$ s.t

$$\begin{aligned} x &= x(r, \theta, \varphi) = r \sin\theta \cos\varphi & (1.7) \\ y &= y(r, \theta, \varphi) = r \sin\theta \sin\varphi & (1.8) \\ z &= z(r, \theta, \varphi) = r \cos\theta, & (1.9) \end{aligned}$$

同時，

$$\begin{aligned} r &= r(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, & (1.10) \\ \theta &= \cos^{-1} \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, & (1.11) \\ \varphi &= \tan^{-1} \frac{y}{x}. & (1.12) \end{aligned}$$

這裡頭 $\phi(x) \equiv x^2 + y^2 + z^2$ 即爲一個 scalar。果然 $\phi'(x') = \phi'(r, \theta, \varphi) = r^2$ 而 $\phi(x) = \phi'(x')$。

Chapter 2

Metric Tensor g_{ab}

各類 tensor 中 metric tensor$g_{ab}(x) \in T(0,2)$ 是一個用來度測長度的工具，*i.e.* 我們可以定義 $ds^2 \equiv g_{ab}dx^a dx^b$，用以指定在 x^a 位置 dx^a 的長度平方。在 $\mathbf{R}^3$ 裡 $g_{ab} = \delta_{ab}$，所以 $ds^2 = \delta_{ab}dx^a dx^b = d\vec{x}^2$。爲了方便起見，我們常用 g_{ab} 來做 lowering operator，*i.e.* 給定任一 tensor $A^b(x)$，define

$$A_a \equiv g_{ab}A^b. \tag{2.1}$$

〔定義〕 Riemann space M. M is a general space with a non-singular ($\det g_{ab}(x) \neq 0, \forall x \in M$) metric tensor g_{ab}.

如果我們把 metric tensor 用 matrix 來寫，*i.e.*，

$$(g)_{ab} \equiv g_{ab}, \tag{2.2}$$

因爲 $\det g \neq 0$，我們可以定義 $(g^{-1})_{ab} \equiv g^{ab}$，得

$$g_{ab}g^{bc} = \delta_a{}^c, \tag{2.3}$$

where 我們已定義 $(\mathbf{1})_{ab} \equiv \delta_a{}^b$，而且 $\delta_a{}^b$ 是一個常數値 type $T(1,1)$ 的 tensor，果然

$$\delta'_a{}^b = \frac{\partial x^c}{\partial x'^a}\frac{\partial x'^b}{\partial x^d}\delta_c{}^d(x) = \delta_a{}^b(x). \tag{2.4}$$

所以由 (2.3) 式可以視 g^{ab} 爲 type $T(2,0)$ 之 tensor，因此，我們可以用 g^{ab} 來做 raising operator，*i.e.* 給定任一 tensor $B_b(x)$，define

$$B^a(x) \equiv g^{ab}(x) B_b(x). \tag{2.5}$$

如果 $A_a \equiv g_{ab}(x) A^b(x)$，則 $A^a = g^{ab} A_b$，毫不衝突。

關於 g_{ab} 在廣義座標轉換下的變化，我們並不陌生。在 $\mathbf{R}^3$ 中的直角座標系下 $g_{ab} = \delta_{ab}$，但我們可以換成球座標，即 $x'^a \equiv (r, \theta, \varphi)$ [*i.e.* (1.7)−(1.9)] s.t.

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{ab} dx^a dx^b = g'_{ab} dx'^a dx'^b \\ &= dx^2 + dy^2 + dz^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\varphi^2 \qquad (2.6) \\ \Rightarrow g'_{ab} &= \mathrm{diag}(1, r^2, r^2 \sin^2\theta). \qquad (2.7) \end{aligned}$$

Chapter 3

共變微分 (Covariant Differentiation)

然而我們發現 $\partial_a A_b$ 並非 tensor，果然

$$\partial'_a A'_b(x') = \frac{\partial x^c}{\partial x'^a}\partial_c\left[\frac{\partial x^d}{\partial x'^b}A_d(x)\right] = \frac{\partial x^c}{\partial x'^a}\frac{\partial x^d}{\partial x'^b}\partial_c A_d(x) + \frac{\partial^2 x^d}{\partial x'^a \partial x'^b}A_d(x). \tag{3.1}$$

唯有 $F_{ab} \equiv \partial_a A_b - \partial_b A_a$ 這樣的反對稱組合裡，多出的第二項 factor $\frac{\partial^2 x^d}{\partial x'^a \partial x'^b}$ 可以剛好消掉。因此雖然 F_{ab} 是一個好的 tensor，但 $\partial_a A_b$ 卻不是。補救的方式是引介一個 covariant 微分的的新微分定義，*i.e.*

$$D_a A_b \equiv \partial_a A_b - \Gamma_{ab}(A_a, g_{ab}), \tag{3.2}$$

期望多出來的項 Γ_{ab} 能消掉 (3.1) 式中多出的項，*i.e.*

$$D'_a A'_b = \frac{\partial x^c}{\partial x'^a}\frac{\partial x^d}{\partial x'^b}D_c A_d. \tag{3.3}$$

一個自然的選擇爲 $\Gamma_{ab} = \Gamma^c_{ab}(g_{ab})A_c(x)$ 以便我們以線性方式處理，其中的 Γ^c_{ab} 則稱之爲 connection。這樣的 connection，類似在 U_1 gauge fieid 裡的gauge connestion A_a（即photon field）。

按：$\phi'(x) = e^{i\theta(x)}\phi(x)$爲一 U_1 gauge 轉換，然而 $\partial_a\phi'(x) = e^{i\theta(x)}\partial_a\phi(x) + i\partial_a\theta e^{i\theta(x)}\phi(x)$，則會多出一項類似 (3.1) 式的尾巴，爲了使 $\partial_a\phi$ 歸正，我們引進 gauge connection $A_a(x)$

，而定義共變微分

$$\nabla_a\phi(x) \equiv \partial_a\phi(x) + iA_a\phi, \tag{3.4}$$

而要求 A_a 在 gauge 轉換下，依下式轉換

$$A'_a = A_a - \partial_a\theta, \tag{3.5}$$

則

$$(\nabla_a\phi)' = e^{i\theta}\nabla_a\phi. \tag{3.6}$$

在重力場的情況下，spin connection Γ^c_{ab}，只要定義成

$$\Gamma^c_{ab} \equiv \frac{1}{2}g^{cd}(\partial_a g_{db} + \partial_b g_{da} - \partial_d g_{ab}), \tag{3.7}$$

則我們可以證明 (3.3) 式可以成立。事實上，我們可以更嚴格地由幾何上的考慮導出 (3.7) 式形式的 spin connection。

同理，我們可以證明

$$\begin{aligned} D_a\phi &= \partial_a\phi, && (3.8) \\ D_aA^b &= \partial_aA^b + \Gamma^b_{ac}A^c, && (3.9) \\ D_aT_{bc} &= \partial_aT_{bc} - \Gamma^d_{ab}T_{dc} - \Gamma^d_{ac}T_{bd}, && (3.10) \\ D_aT^b{}_c &= \partial_aT^b{}_c + \Gamma^b_{ad}T^d{}_c - \Gamma^d_{ac}T^b{}_d, && (3.11) \end{aligned}$$

等等。其中 $T_{ab} \in T(0,2)$, $T^b{}_c \in T(1,1)$。其餘 tensor，依此類推。

同時我們可以證明

$$\begin{aligned} D_ag_{bc} &= 0, && (3.12) \\ D_a(A_bB_c) &= (D_aA_b)B_c + A_bD_aB_c. && (3.13) \end{aligned}$$

(3.13) 式告訴我們 D_a 爲一 derivation，滿足 Leibniz rule，而(3.12) 也 imply $D_a g^{bc} = 0$，所以 g_{ab}, g^{ab} 在升降 index 時，可以自由跨越微分記號，*i.e.*

$$g^{cd} D_a A_b = D_a(g^{cd} A_b), \tag{3.14}$$

$$D_a A^a = g^{ab} D_a A_b \equiv D^a A_a. \tag{3.15}$$

Chapter 4

Curvature Tensor

我們可以定義 curvature tensor R_{abc}^{d} by

$$[D_a, D_b]A_c \equiv R_{cba}^{d} A_d. \tag{4.1}$$

經簡單的計算，即可得

$$R_{cba}^{d} = -\partial_a \Gamma_{bc}^{d} - \Gamma_{cb}^{e} \Gamma_{ae}^{d} - (a \leftrightarrow b). \tag{4.2}$$

再定義 Ricci tensor $R_{ab} \equiv R_{abc}^{c}$ 及 scalar curvature $R \equiv R_{ab} g^{ab}$。

由 (4.1) 可知 $R_{cba}^{d} = -R_{cab}^{d}$，如定義 $R_{abcd} \equiv g_{ae} R_{bcd}^{e}$，則我們可以進一步證明

$$R_{abcd} = -R_{bacd} \tag{4.3}$$

$$R_{abcd} = R_{cdab} \tag{4.4}$$

$$R_{abcd} + R_{acdb} + R_{adbc} = 0 \tag{4.5}$$

其中 (4.5) 式可由 (4.2) 式直接驗證。同時 (4.5) 式又稱廣義相對論中的 Jacobi Identity。其原因爲：(4.5) 式可以 (4.1) 式的定義改寫成

$$[D_a, D_b]A_c + [D_b, D_c]A_a + [D_c, D_a]A_b = 0 \tag{4.6}$$

同時因爲 $A_a = D_a$ 中時，上式可改寫成

$$\left([[D_a, D_b], D_c] + [[D_b, D_c], D_a] + [[D_c, D_a], D_b] \right) \phi = 0 \tag{4.7}$$

其中我們用到 $[D_a, D_b]\phi = 0$ 的等式，因爲 $[[A, B], C]$+permutations 爲 Jacobi Identity。所以上式自動爲零，另由 (4.3) 式可知共有 $C_2^4 \times C_2^4 = 6 \times 6$ 個自由度，而 (4.4) 式則示知其剩 $C_2^7 = 21$ 個，另外，因爲僅有3種不爲零的 R_{abcd}，意即 R_{titj}, R_{tijk} 及 R_{ijke} ，所以 (4.5) 式事實上只有一個 R_{tijk} 的 constraint,這是因爲 R_{titj}+permutations 自動爲零，而且 R_{ijke} 只有 $C_2^4 = 6$ 個 components 可以簡單地證明他們全部自動爲零，$e.g. R_{1212} + R_{1122} + R_{1221} = 0$ 事實上 (4.5) 式也可以改成 $R_{abcd} + R_{cbda} + R_{dbac} = 0$ 所以眞正的 constraint 爲 $P_4^n = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}$， 即任2 indices 重覆(例如:$R_{aabc} + R_{abca} + R_{acab} = 0$) 則可由其它對稱得其爲零

因此，可以確定 R_{abcd} 在四維時僅有 20 個 independent compoments.R_{abcd} 眞正的自由度爲 $C_2^{C_2^n + 1} - C_4^n = \frac{1}{12} n^2 (n^2 - 1)$ 個. 另外，$R_{ab} = R_{ba}$ 在 $d = 4$ 時，共有 10 個 independent components。很早時，Einstein,便猜測 g_{ab} (共有 10 個變數) 之 EOM，可能可以由 $R_{ab} = 0$ 得到。事實上，應該是 $G_{ab} = 0$。其中 $G_{ab} \equiv \frac{1}{2} g_{ab} R - R_{ab}$ 爲 Riemann tensor，由 $G_{ab} = 0$ 可以立刻得到：只要 $d \neq 2$，則 $R_{ab} = 0$。其證明如下

$$\begin{aligned} G_{ab} &= \frac{1}{2} g_{ab} R - R_{ab} = 0 \\ g^{ab} G_{ab} &= \frac{1}{2} g^{ab} g_{ab} R - R = 0 \\ \frac{n}{2} R - R &= 0 \text{ if } n \neq 2 \text{ , R=0} \end{aligned}$$

事實上我們要花點時間來介紹如何由 action

$$S \equiv -\int d^4 x \sqrt{g} R \tag{4.8}$$

得到場方程式 $G_{ab} = 0$。在此之前，我們先介紹一點平常常見的應用.

Note that $D_aD^a\phi$ 爲彎曲空間的 Laplace equation。在 $g_{ab}=\delta_{ab}$ 之 $\mathbf{R}^3$ 座標中，

$$D_aD^a\phi=\nabla^2\phi=(\partial_x^2+\partial_y^2+\partial_z^2)\phi. \tag{4.9}$$

但換到球座標 $x'^a\equiv(r,\theta,\varphi)$ 上時

$$\begin{aligned} D_aD^a\phi &= g^{ab}D_a\partial_b\phi=g^{ab}(\partial_a\partial_b\phi-\Gamma^c_{ab}\partial_c\phi) \\ &= \partial^a\partial_a\phi-\Gamma^a\partial_a\phi, \end{aligned} \tag{4.10}$$

其中 $\Gamma^a\equiv\Gamma^a_{bc}g^{bc}$，因爲 $g^{ab}=\mathrm{diag}(1,\frac{1}{r^2},\frac{1}{r^2\sin^2\theta})$。所以，二次微分項爲

$$\partial_r^2\phi+\frac{1}{r^2}\partial_\theta^2\phi+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\partial_\varphi^2\phi. \tag{4.11}$$

而一次微分項，需先知道 Γ^a 之形式，that's easy！因爲

$$\begin{aligned} \Gamma^a=\Gamma^a_{bc}g^{bc} &= \frac{1}{2}g^{ad}(\partial_b g_{dc}+\partial_c g_{db}-\partial_d g_{bc})g^{bc} \\ &= g^{ad}\partial^c g_{dc}-\frac{1}{2}g^{bc}\partial^a g_{bc} \\ &= g^{aa}\partial^a g_{aa}-\frac{1}{2}g^{-1}\partial^a g \\ &= (g^{aa})^2\partial_a g_{aa}-g^{aa}\partial_a\ln\sqrt{g}, \end{aligned} \tag{4.12}$$

where 第一項因 g_{ab} 及 g^{ab} 爲 diagonal matrix，故 $d=a$ 及 $c=d$ 時，才不爲零。另 $g\equiv\det g_{ab}=r^4\sin^2\theta$，故 $\sqrt{g}=r^2\sin^2\theta$，

$$\Gamma^r = (g^{rr})^2\partial_r g_{rr}-\frac{2}{r}=\frac{-2}{r}, \tag{4.13}$$

$$\Gamma^\theta = \frac{-1}{r^2}\frac{2\sin\theta\cos\theta}{\sin^2\theta}=\frac{-2}{r^2}\cot\theta, \tag{4.14}$$

$$\Gamma^\varphi = 0, \tag{4.15}$$

一次微分項爲

$$-\Gamma^a\partial_a\phi=\frac{2}{r}\partial_r\phi+\frac{1}{r^2}\cot\theta\partial_\theta\phi, \tag{4.16}$$

所以
$$D_aD^a\phi = \frac{1}{r}\partial_r^2(r\phi) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\partial_\theta(\sin\theta\partial_\theta\phi) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\partial_\varphi^2\phi. \tag{4.17}$$
此外，我們尚有一 Bianchi Identy
$$D_aR_{bcde} + D_bR_{cade} + D_cR_{abde} = 0 \tag{4.18}$$
其中 abc 不得重覆。由此可得
$$D_aG^{ab} = 0 \tag{4.19}$$
其中 (4.18) 式可由
$$D_a[[D_b, D_c]A_e] - D_aA_dR_{debc} + \text{permutations} = 0 \tag{4.20}$$
而得。(**??**) 式可改寫成
$$[D_a, [D_a, D_c]]A_e + [D_b, D_c]D_aA_e - D_aA_dR^d_{ecb} + \text{permutations} = 0 \tag{4.21}$$
第一項爲 Jacobi Identity 自動爲零,第2項可利用
$$[D_b, D_c]T_{ae} = R^d_{acb}T_{de} + R^d_{ecb}T_{ad} \tag{4.22}$$
和第3項合併成
$$R^d_{acb}D_dA_e + \text{permuteations} = 0 \tag{4.23}$$
此即 (4.5) 式。因此 (4.18) 式並未爲我們帶進任何新的 constraint,看似奇怪，其實 constraint (4.18) 式是落實在 Ricci curcatare 的組合，即 Riemann tensor 上，而且我們的系統本來就有 general coordinate symmetry 正好搭配 $D_aG^{ab} = 0$ 加在 g_{ab} 上的 constraint。

Chapter 5

電磁場

另一件值得注意之事，即我們知道 $F_{ab} \equiv D_a A_b - D_b A_a = \partial_a A_b - \partial_b A_a$ 自動滿足 tensor 之要求，而其 field equation $D_a F^{ab} = J^b$ 在換座標時，常發生誤解。

以 $J^a = 0$ 爲例，$D_a F^{ab} = 0$ 即化成 $D_a D^a A^b - D_a D^b A^a = 0$。因爲在 Minkowski space 裡 $R_{abcd} = 0$，所以 $D_a D^b A^a = D^b D_a A^a$。取 Lorentz gauge $D_a A^a = 0$ 則 field equation 便成爲

$$D_a D^a A_b = 0. \tag{5.1}$$

在一般情況下 $A_b \equiv (\varphi, \overrightarrow{A})$ 之 field equation 爲

$$D_a D^a \phi = 0 \tag{5.2}$$

$$D_a D^a \overrightarrow{A} = 0 \tag{5.3}$$

但 ϕ 並非 scalar，$\overrightarrow{A}$ 並非 3-vector，故上二式並無意義，而且一但座標換了，ϕ，$\overrightarrow{A}$ 會因此而互動，此外 (5.1) 式中，$\phi\overrightarrow{A}$ 會錯在一起，所幸在 static 及

$$g_{ab} = \left(\begin{array}{c|c} -1 & 0 \\ \hline 0 & g_{ij} \end{array}\right) \tag{5.4}$$

情況下，$\Gamma^t_{ab} = \Gamma^a_{tb} = 0$，我們可以證明 (5.1) 式中 $b = 0$ 之 field equation，剛好化成

$$D_i \partial^i \phi = 0 \tag{5.5}$$

where $D_i\partial^i$ 是在 g_{ij} 之 3-dim 空間上去算的。同時，我們注意到在一般 $\mathbf{R}^3$ 空間部份的座標轉換，如果 $t \to t' = t$ 則

$$A'_0(x') = A_0(x) \tag{5.6}$$

$$A'_i(x') = \frac{\partial x^j}{\partial x'^i} A_j(x) \tag{5.7}$$

意即 A_0 在 $\mathbf{R}^3$ 轉換下，像一個 $\mathbf{R}^3$ 的 scalar，而同時 A_i 在 $\mathbf{R}^3$ 轉換下，也像一個 3-vector 或 $T(0,1)$ tensor。因此，我們可以直接採用 (5.5) 式，不必擔心 (5.5) 式無法表現 (5.1) 式的所有性質，因爲 A_0 和 A_i 在 $\mathbf{R}^3$ 轉換下，並無交錯之慮。

Chapter 6

Least Action Principle

給定任一 scalar action，比方說

$$S(\phi) \equiv \int dt L(\phi) \tag{6.1}$$

with $L(\phi) \equiv \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi)$，我們可以運用 variational principle 取 $S(\phi)$ 在 $\phi \to \phi' = \phi_0 + \delta\phi$ variation 下的極值。根據 Least action principle， classical path 會自動追尋一條使 $S(\phi)$ 得極小値的路徑。這些東西一般大二力學都會有詳細的陳述，在此略過。簡言之，我們將假設，一旦我們對 Lagrangian (density) L 做變分時，所有 integration by part 的 surface term，一律爲零。這其中 involved 的道理，非同小可，但因牽涉太廣，在此也略過。總之，我們可得

$$\delta S(\phi) = \int dt(-\ddot{\phi} - \frac{\partial V}{\partial \phi})\delta\phi = 0, \tag{6.2}$$

因此， Least action principle 要求 integrand 爲零，意即我們由上式得到 ϕ 的運動方程式 (也就是 Euler-Lagrange equationa) 爲

$$\ddot{\phi} + \frac{\partial V}{\partial \phi} = 0, \tag{6.3}$$

如果 $\phi = x$，即一般古典力學的粒子座標位置。在滿足廣義相對不變性的系統裡，我們將要求 S 本身是一個 scalar。驗諸所有量子場論成功的例子，如 QED，Unified theory

，QCD 等，皆是如此。因此，scalar ϕ 的 action $S(\phi)$ 必須修正為

$$S(\phi) \equiv \int d^4x\sqrt{g}\mathcal{L}(\phi) \tag{6.4}$$

with $\mathcal{L}(\phi) \equiv -\frac{1}{2}\partial_a\phi\partial^a\phi - V(\phi)$。在此，我們令時空 metric 的 sign 為 $(-,+,+,+)$，一如 (5.4) 式中所用的，其中 $x_0 = t$。因為 $d^4x\sqrt{g}$ 才是 invariant measure，所以必須將體積測度 dV 還原成 $d^4x\sqrt{g}$；這是由於

$$\begin{aligned}
g'_{ab} &= \frac{\partial x^c}{\partial x'^a}\frac{\partial x^d}{\partial x'^b}g_{cd} && (6.5)\\
\det g'_{ab} &= \left(\det\frac{\partial x}{\partial x'}\right)^2 \det g_{ab} \\
\sqrt{g'} &= \left|\frac{\partial x}{\partial x'}\right|\sqrt{g'}\text{where } g \equiv -\det g_{ab} \\
d^4x' &= \left|\frac{\partial x'}{\partial x}\right| d^4x && (6.6)
\end{aligned}$$

的緣故。

同樣的，我們可以輕鬆地利用 variational principle 得到

$$\begin{aligned}
\delta S(\phi) &= \int d^4x\sqrt{g}[D^a\partial_a\phi - \frac{\delta V}{\delta\phi}]\delta\phi \\
&+ \int d^4x\sqrt{g}[\frac{1}{2}\partial^a\phi\partial^b\phi - \frac{1}{2}g^{ab}V]\delta g_{ab}, && (6.7)
\end{aligned}$$

如果不看 g_{ab} 的變化，則 ϕ 的 EOM 變成

$$D^a\partial_a\phi - \frac{\delta V}{\delta\phi} = 0. \tag{6.8}$$

g_{ab}的部份，我們會立刻介紹，在此略過。

接下來我們將介紹電磁場的 action $S(A_a)$ 為

$$S = -\int d^4x\sqrt{g}\left[\frac{1}{4}F_{ab}F_{cd}g^{ac}g^{bd} + J^aA_a\right] \tag{6.9}$$

其中 J^a 爲外加電流，在我們所知的 QED 裡 $J^a = \bar{\psi}\gamma^a\psi$ 爲fermionic particle 所貢獻的電流，大家可以參考 QED 的書，在此僅當成與 A_a 無涉的外加電流，所以並不影響對 A_a 變分所應得的方程式：

$$\begin{aligned} \delta S &= \int d^4x\sqrt{g}[D_aF^{ab} - J^b]\delta A_b \\ &+ \int d^4x\sqrt{g}[\frac{1}{2}F^a{}_cF^{bc} - \frac{1}{8}g^{ab}F_{cd}F^{cd}]\delta g_{ab} \\ &+ \int d^4x\sqrt{g}f(J^a, g_{ab}, A_a), \end{aligned} \tag{6.10}$$

最後一項，因爲 fermionic particle 在 curved spacetime 裡面比較複雜，在此略過。所以 δA_b 得到 A_a 之 EOM 爲

$$D_aF^{ab} = J^b, \tag{6.11}$$

這就是我們所熟知的 Maxwell 方程式。値得注意的是，光子 A_a 看似有四個 degree of freedom，事實上，上式在去掉 U_1 規範變換的多餘自由度後，只餘留兩個自由度。古典的推導，可參看 J.D.Jackson,*Classical Electrodynamics*。量子場論的推導，可參看任何場論教本。事實上 Weinberg 已證明所有 massless gauge field 都只殘留兩個自由度，即我們所知的 helicity。這是 massless particle 和 massive particle 非常不一樣的地方。我們可以把 U_1 的電磁場推廣到任何 gauge group 的 Yang-Mills 場，以上方式，照用不誤。

然而，我們在此當然是要介紹重力子 graviton 的運動方程。根據 Einstein 的猜測，重力場的運動方程式應爲 $R_{ab} = 0$，（意即 $G_{ab} = 0$ ）。這其實是眞空裡的場方程式。相同的，我們可以發現以下 action

$$S(g_{ab}) \equiv -\int d^4x\sqrt{g}R \tag{6.12}$$

可以經由對 g_{ab} 變分得到

$$\delta S = -\int d^4x\sqrt{g}[R^{ab} - \frac{1}{2}g^{ab}R]\delta g_{ab} - \int d^4x\sqrt{g}g^{ab}\delta R_{ab} \tag{6.13}$$

因爲 $\delta R_{ab} = -D_c\delta\Gamma^c_{ab} + D_b\delta\Gamma_a$ with $\Gamma_a \equiv \Gamma^c_{ab}g^b{}_c$。請注意 Γ^c_{ab} 本身不是 tensor，所以 $\delta\Gamma^c_{ab}$ 也不一定是 tensor，我們寫 $D_c\delta\Gamma^c_{ab}$ 等只是取巧，其實 $D_b\delta\Gamma_a = \partial_b\delta\Gamma_a - \Gamma^c_{ab}\delta\Gamma_c$。這麼做的原因是，$\int d^4x\sqrt{g}(\delta R^{ab})g_{ab}$ 可立即經由 integration by part 變成 surface term 而去之。

我們在上面一直用到的公式，諸如

$$\partial_a(\sqrt{g}A^a) = \sqrt{g}(D_aA^a) \tag{6.14}$$

$$\partial_a(\sqrt{g}F^{ab}) = \sqrt{g}D_aF^{ab}, \tag{6.15}$$

皆爲簡易的等式。其中 (6.15) 式必須要求 F^{ab} 爲反對稱，即 $F_{ab} = -F_{ba}$。請注意上兩式中，只要 D_aA^a 及 D_aF^{ab} 的共變微分結構存在即成立，並不一定要求 A^a 等爲一個 tensor。

所以，我們得到 g_{ab} 的 EOM 爲

$$R^{ab} - \frac{1}{2}g^{ab}R = T^{ab} \tag{6.16}$$

其中 T^{ab} 爲 energy momentum tensor，在真空中爲零。如果不在真空中，比方說有 scalar ϕ 及 vector A_a 存在，則 action 變成

$$S = -\int d^4x\sqrt{g}[R + \frac{1}{4}F_{ab}F^{ab} + \frac{1}{2}\partial_a\phi\partial^a\phi + V(\phi)], \tag{6.17}$$

則 g_{ab} 的 EOM 便會使 T^{ab} 變成（假設 $J^a = 0$ ）

$$T^{ab} = \frac{1}{2}F^a{}_cF^{bc} + \frac{1}{2}\partial^a\phi\partial^b\phi - \frac{1}{2}g^{ab}(\frac{1}{2}\partial_c\phi\partial^c\phi + \frac{1}{4}F_{cd}F^{cd} + V(\phi)), \tag{6.18}$$

忽略 J^a 項的原因還是一樣：fermion 的重力 coupling 相當複雜，暫時不表。

Chapter 7

Schwarzschild Space

有了運動方程式之後,我們便可以在不同的系統裡求解。求得的解便可以幫住我們了解宇宙間重力的變化。最簡單，應用也最廣的便是 spherically symmetric Schwarzschild spaces 及滿足 isotropic 及 homogeneous 性質的 Friedmann-Robertson-Walker spaces。前者可直接取得古典的極限，用以和牛頓重力理論相比較，並可用之取的黑洞解。後者則用來描述整個宇宙的運動及演變。並可描述早期宇宙 inflation 及誕生、成形的過程，因此我們將以此二者爲例，深入介紹。

我們可以從幾何上，要求空間爲 stationary 及 spherically symmetric，我們便可以將 g_{ab} 的變數由 10 個，化減成 3 個，意即：g_{ab} 可由下式讀出：

$$ds^2 \equiv g_{ab}dx^a dx^b \equiv -e^{2A(t,r)}dt^2 + e^{2B(t,r)}dr^2 + 2e^{2D(t,r)}dtdr + r^2 d\Omega \tag{7.1}$$

其中 A, B 及 D 均爲 t, r 的函數，而 $d\Omega \equiv d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$ 爲 solid angle。由 Appendix 可知該系統的運動方程式，只要是在眞空中(即 $R_{ab} = 0$) 則可得，所謂的 Birkhoff 定理：

$$e^{2D} = 0 \tag{7.2}$$

$$A = A(r) \tag{7.3}$$

$$B = B(r) \tag{7.4}$$

由此，這個空間的 metric 即成

$$ds^2 = e^{-2A(r)}dt^2 + e^{2B(r)}dr^2 + r^2 d\Omega \tag{7.5}$$

因此，只要空間中所含的物質，以球對稱形式分佈、集中於某一個區域內，則其外部的其餘空間，便可由 (7.5) 式的 Schwarzchild metric 來描述。Birkhoff 定理也強調含物質部份的運動(隨變化)只要仍滿足球對稱，則我們便無法由外面測知。

要知道，即使物質本身分佈非爲球對稱，只要距離很遠，則其非球對稱部分，一如我們對電荷分佈的計算，對遠方的效應很小，便可以微擾處理之。

另一種應用則爲處理 1-particle system。我們可以把系統座標放成粒子本身身上，即所謂的 co-moving frame 則可自然地得到 time-independent 的座標系統。再加上一個 1-particle state 本身即擁有 Poincare symmetry，自然可得 spherically symmetric space 的要求。

Chapter 8

Levi-Civita Tensor

Levi-Civita tensor is an almost-constant type T(n, 0) tensor defined on any n-D Riemannian spaces M^n. It is totally skewsymmetric w.r.t all its indices. In what follows, we will introduce it in $\mathbf{R}^n$ under Cartesian coordinates. Definition on a general Riemannian space M^n will be introduced later on.

We will start by defining it on $\mathbf{R}^3$ and follow up with a general definition on n-D.

Definition 8.1 ϵ^{ijk} is totally skew-symmetric with $\epsilon^{123} = 1$. Here $i,\ j,\ k\ =\ 1, 2, 3$.

Definition 8.2 $\epsilon^{a_1 a_2 \ldots a_n}$ is totally skew-symmetric with $\epsilon^{123\ldots n} = 1$.

There are a number of problems one can work out rather straightforwardly. These show the most intrinsic pictures and applications hidden under the useful Levi-Civita tensor.

Problem 8.1 $\epsilon^{ij} \equiv [\,\epsilon\,]_{ij} \Rightarrow \epsilon = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Problem 8.2 $\epsilon^{ijk}\epsilon^{abc} = (ijk) + (jki) + (kij) - (i \leftrightarrow j)$. Here $(ijk) \equiv \delta_{ai}\delta_{bj}\delta_{ck}$.

Problem 8.3 $\epsilon^{ijk}\epsilon^{abk} = \delta_{ai}\delta_{bj} - \delta_{bi}\delta_{aj}$.

Problem 8.4 $\epsilon^{ijk}\epsilon^{ajk} = 2\delta_{ai}$.

Problem 8.5 $\epsilon^{ijk}\epsilon^{ijk} = 6$.

There are also other applications of Levi-Civita tensor that are very useful in computing the determinant of a square matrix and in the derivation of vector cross product. We will present their definitions along with some useful formulae.

Definition 8.3 $\det A_{n\times n} \equiv \epsilon^{a_1 a_2 \ldots a_n} A_{1a_1} A_{2a_2} \ldots A_{na_n}$.

Definition 8.4 $A^i \in \mathbf{R}^3 \Rightarrow (\mathbf{A}\times\mathbf{B})^i \equiv \epsilon^{ijk} A^j B^k$.

Problem 8.6 $\epsilon_{b_1 b_2 \ldots b_n} \det A = \epsilon^{a_1 \ldots a_n} A_{b_1 a_1} A_{b_2 a_2} \ldots A_{b_n a_n}$.

Problem 8.7 $\det A = \frac{1}{n!}\epsilon^{a_1\ldots a_n}\epsilon^{b_1\ldots b_n} A_{a_1 b_1} A_{a_2 b_2} \ldots A_{a_n b_n}$.

Problem 8.8 $\det A^t = \det A$.

Moreover, ϵ^{ijk} turns out to be the structure constant of the SU_2 and SO_3 groups. To be familiar with algebraic structure of flat 3-D Levi-Civita tensor is hence very important in studying quantum spin operator as well as spatial angular momentum operator one has to encounter in Q.M. Also, from the definition of Pauli matrices, one is able to link $\mathbf{R}^3$ with the algebra su_2. Indeed, we will present the definition of Pauli matrices along with various applications as problem sets.

Definition 8.5 Pauli matrices: $\sigma^i \equiv \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right]$ s.t. $x^i\sigma^i = \begin{pmatrix} z & x_- \\ x_+ & z \end{pmatrix}$ with $x_\pm \equiv x \pm iy$.

There are some useful formulae one should know about, e.g.:

$$\begin{aligned}
\sigma^i\sigma^j &= \delta^{ij} + i\epsilon^{ijk}\sigma^k, && (8.1)\\
\mathrm{e}^{i\,\hat{n}^a\sigma^a\theta(x)} &= \cos\theta + i\hat{n}^a\sigma^a\sin\theta, && (8.2)\\
\left[\sigma^i,\ \sigma^j\right] &= 2i\epsilon^{ijk}\sigma^k, && (8.3)\\
\left[T^i,\ T^j\right] &= i\epsilon^{ijk}T^k && (8.4)
\end{aligned}$$

with $T^i \equiv \frac{\sigma^i}{2}$.

Now we are ready to introduce it in any n-D Riemannian spaces. The flat space constant Levi-Civita tensor will then denoted as $e^{a_1a_2\ldots a_n}$ s.t.

$$\epsilon^{a_1a_2\ldots a_n} = \frac{1}{\sqrt{g}}e^{a_1a_2\ldots a_n}. \tag{8.5}$$

One should remark here that $e^{a_1a_2\ldots a_n}$ is a constant function which shall not transform with coordinate transformation. It is straightforward to show that (8.5) guarantee that the Levi-Civita totally skew-symmetric funtion is indeed a type T(n, 0) tensor. One can further show that there exists another type T(0, n) tensor $\epsilon_{a_1a_2\ldots a_n}$ obtained by lowering all upper indices of $\epsilon^{a_1a_2\ldots a_n}$.

One can further show that

$$\epsilon_{a_1a_2\ldots a_n} = \sqrt{g}e^{a_1a_2\ldots a_n}. \tag{8.6}$$

Note that there is a sign omitted in defintion of (8.6). In our pseudo-Riemannian spaces, $g \equiv -\det g_ab$, one should put a $-$ sign in front of the L.H.S. of equation (8.6). Indeed, one can easily show that the form given in equation (8.6) is correct as a tensor. Note that the formulae listed in problem sets (8.2) to (8.5) can be generalized to n-D with appropriate sign added accordoing to the relevant signature of the manifold under discussion. For example, one should have

$$\epsilon^{a_1 a_2 \ldots a_n} \epsilon_{a_1 a_2 \ldots a_n} = \pm n!. \tag{8.7}$$